TEMA 2: SISTEMAS LINEALES

1. Introducción

Un *sistema de m ecuaciones lineales* con n *incógnitas* viene dado por

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}$$

donde a_{ij} y b_k son números reales fijos y $x_1, \ldots, x_n$ son las incógnitas o variables del sistema.

Un sistema lineal puede ser escrito en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

El sistema es llamado *homogéneo* si el vector de *términos independientes* $\mathbf{b}$ es el vector nulo. Una *solución* del sistema anterior es un vector $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$ que satisface la ecuación matricial, $A\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$.

Definition 1.1. Un sistema lineal de ecuaciones es *compatible* si el sistema admite soluciones. Diremos que es *incompatible* si no tiene solución. Un sistema lineal de ecuaciones compatible se dice que es *determinado* si tiene una única solución. Diremos que es *indeterminado* si tiene más de una solución. En realidad, si un sistema lineal tiene más de una solución entonces tiene infinitas soluciones.

Theorem 1.2. *Si el sistema lineal es compatible indeterminado entonces admite infinitas soluciones.*

Para sistemas de tamaño $m \times 2$ existe una interpretación geométrica. Cada ecuación representa una recta en el plano y las soluciones del sistema (si existen) son los puntos de intersección de las m rectas. En el caso de dos rectas, $m = 2$, el sistema es compatible determinado cuando las dos rectas se intersectan en un solo punto. El sistema es incompatible si las dos rectas son paralelas y no coinciden. Y por último, el sistema es compatible indeterminado si las dos rectas coinciden, esto es, si ambas ecuaciones son proporcionales.

Example 1.3. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

es incompatible, puesto que ambas rectas son paralelas (ellas tienen la misma pendiente -2) pero no coinciden, ya que las ecuaciones no son proporcionales.

El sistema

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4y = 8 \end{cases}$$

es compatible determinado. Las rectas tienen distintas pendientes, -1 y 0, respectivamente y sólo se intersectan en $(3, 2)$. Por lo tanto, la única solución es el vector $(3, 2)$.

El sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

es compatible indeterminado. En realidad, ambas ecuaciones representan a la misma recta. Podemos describir el conjunto de soluciones como $\{(x, 4-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1.1. **Teorema de Rouché–Frobenius.** Dado un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, llamamos a A *matriz del sistema* y a $(A|\mathbf{b})$ *matriz ampliada*. La matriz ampliada $(A|\mathbf{b}) \in M_{m\times(n+1)}$ contiene a A en las primeras n columnas y a $\mathbf{b}$ en la columna $n+1$.

Estableceremos un criterio para estudiar las soluciones de un sistema lineal en términos del rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada. Puesto que todo determinante en A también ocurre en $(A|\mathbf{b})$, el rango de A no puede exceder al de $(A|\mathbf{b})$. Por lo tanto, existen dos posibilidades: $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}(A|\mathbf{b})$ o $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\mathbf{b})$.

Theorem 1.4 (Teorema de Rouché–Frobenius)**.** *Consideremos el sistema de ecuaciones* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*. El sistema es compatible si, y sólo si* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\mathbf{b})$*. Para un sistema compatible, tenemos que*

(1) El sistema es compatible determinado si, y sólo si, el rango de A es igual al número de incógnitas, $\operatorname{rank} A = n$*;*

(2) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, el rango de A es menor al número de incógnitas, $\operatorname{rank} A = r < n$*. En este caso, el número de parámetros necesarios en la solución del sistema es* $n - \operatorname{rank}(A)$*.*

Note que un sistema homogéneo siempre tiene solución, la solución trivial $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. En efecto, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\mathbf{0})$.

Example 1.5. Estudiemos el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \end{cases}.$$

Solución: Observemos que $(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & 5 & | & 3 \end{pmatrix}$. Ahora calculamos simultáneamente el rango de las matrices A y $(A|\mathbf{b})$ por medio de transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 2 & 5 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Así que $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\mathbf{b}) = 2$. Según el teorema anterior, el sistema es compatible indeterminado, y el número de parámetros en el conjunto de soluciones es $3 - \operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1$. A continuación, mostraremos un método para hallar el conjunto de soluciones de un sistema.

1.2. **El método de Gauss para solucionar sistemas lineales de ecuaciones.** El método de Gauss para resolver sistemas lineales consiste en encontrar la forma escalonada de la matriz ampliada $(A|\mathbf{b})$. Luego, hallamos el conjunto de soluciones para el sistema equivalente más simple, comenzando por la última ecuación hasta la primera. Veamos esto con un ejemplo.

Example 1.6. Encontremos las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$$

Solución: Ya sabemos que el sistema es compatible indeterminado y que la forma escalonada de la matriz ampliada es (ver ejemplo anterior)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que el sistema equivalente es $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$, en cuyo caso, las soluciones pueden ser halladas fácilmente, comenzando por la última ecuación, $y=-z$, y sustituyendo esta en la primera, tenemos que $x=1-y-2z=1-(-z)-2z=1-z$. Luego, z se usa como parámetro y el conjunto de soluciones se expresa en función de ese parámetro $\{(1-z,-z,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}$.

1.3. **Regla de Cramer.** Estudiaremos ahora un método basado en determinantes para obtener de manera explícita la solución de sistemas lineales de orden $n\times n$.

Theorem 1.7. *Un sistema lineal de orden $n\times n$ es compatible determinado si, y sólo si $|A|\neq 0$.*

Esta es una consecuencia directa del teorema de Rouché–Frobenius, puesto que cuando $|A|\neq 0$, $\operatorname{rank} A = n$. Ya que siempre es cierto que $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank}(A|\mathbf{b}) \leq n$, necesariamente $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|\mathbf{b}) = n$ y el sistema es compatible determinado. Esto es, admite una única solución.

Consideremos un sistema compatible determinado

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n = & b_n. \end{cases}$$

Ya sabemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Llamemos $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ a la única solución del sistema. Entonces, la regla de Cramer proporciona la solución de la siguiente manera

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad \dots \quad x_n^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}.$$

Example 1.8. Encuentre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=3 \\ 4x+y+z=6 \\ 2x-y+z=2. \end{cases}$$

Solución: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$. Así, por el teorema anterior, existe una única solución.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -14, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

$x^*=1$, $y^*=1$, and $z^*=1$.